Integral Múltiple

De libro Cálculo de Larson, tomo 2, sexta edición Capítulo 13

Integrales iteradas

En el Capítulo 12 vimos que tiene sentido diferenciar una función de varias variables respecto de una de ellas, manteniendo constantes las demás. Por un procedimiento análogo, vamos a *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, si se nos da la derivada parcial

$$f_x(x, y) = 2xy$$

podemos, considerando a y como constante, integrar con respecto a x, obteniendo así

$$f(x, y) = \int f_x(x, y)\, dx \qquad \text{Integrar en } x$$

$$= \int 2xy\, dx \qquad \text{Mantener } y \text{ constante}$$

$$= y \int 2x\, dx \qquad \text{Sacar fuera el factor } y$$

$$= y(x^2) + C(y) \qquad \text{Una primitiva de } 2x \text{ es } x^2$$

$$= x^2y + C(y) \qquad C(y) \text{ es función de } y$$

Nótese que la «constante» de integración, $C(y)$, es una función de y. En otras palabras, integrando respecto de x sólo somos capaces de reconstruir $f(x, y)$ parcialmente. De la reconstrucción total de una función de dos variables a partir de sus derivadas parciales nos ocuparemos en el Capítulo 14. Por el momento, nos dedicaremos a extender la integración definida a funciones de varias variables. Por ejemplo, considerando y constante, podemos aplicar el teorema fundamental del Cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy\, dx = x^2y \Big]_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y$$

- x es la variable de integración; y es fija
- Sustituir x por los límites de integración
- El resultado es una función de y

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y)\,dx = f(x, y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \quad \text{Con respecto a } x$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y)\,dy = f(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \quad \text{Con respecto a } y$$

En el Ejemplo 1, nótese que la integral define una función de x, de modo que *ella misma* puede ser integrada, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 La integral de una integral

Calcular $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\,dy \right] dx$

Solución: Usando el resultado del Ejemplo 1 vemos que

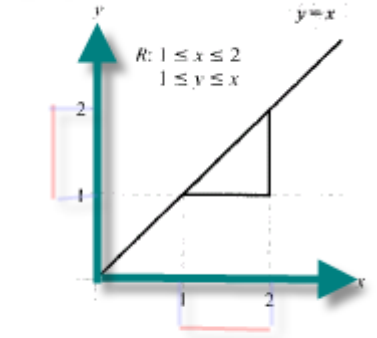
$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\,dy \right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1)\,dx \\ &= \left[x^3 - x^2 - x \right]_1^2 \\ &= 2 - (-1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

La integral del Ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes utilizados en el Ejemplo 2 suelen omitirse. De hecho, las integrales iteradas se escriben

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy$$

Los **límites interiores de integración** pueden ser variables respecto de la variable exterior de integración. Por el contrario, los **límites exteriores de integración** han de ser constantes con respecto a las dos variables de integración. Una vez efectuada la integración interior, se llega a una integral definida ordinaria, y la segunda integración produce ya un número real. Los límites de integración de una integral iterada identifican dos intervalos para las variables.

Ejemplo



La región de integración para $\int_1^2 \int_1^x f(x, y)\, dy\, dx$.

Puesto que una integral iterada no es sino un caso especial de integral definida, en el que el integrando es a su vez una integral, podemos utilizar las propiedades de las integrales definidas al evaluar integrales iteradas.

Área de una región plana

En el resto de la sección contemplamos desde una perspectiva nueva el viejo problema de calcular el área de una región en el plano. Consideremos la región plana R acotada por $a \leqslant x \leqslant b$ y $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Su área viene dada por la integral definida

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

Gracias al teorema fundamental del Cálculo podemos reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. En concreto, si consideramos que x está fija y hacemos variar y desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, tenemos

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x)$$

Combinando esas dos integrales podemos expresar el área de R como la integral iterada

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \qquad \text{Área de } R$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

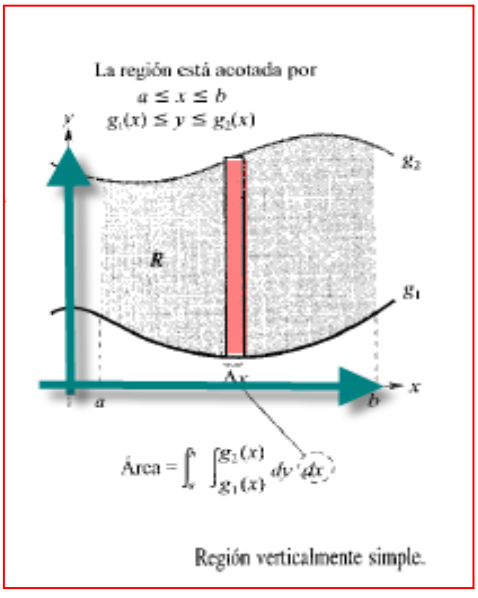
ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1, g_2 son continuas en $[a, b]$, el área de R viene dada por

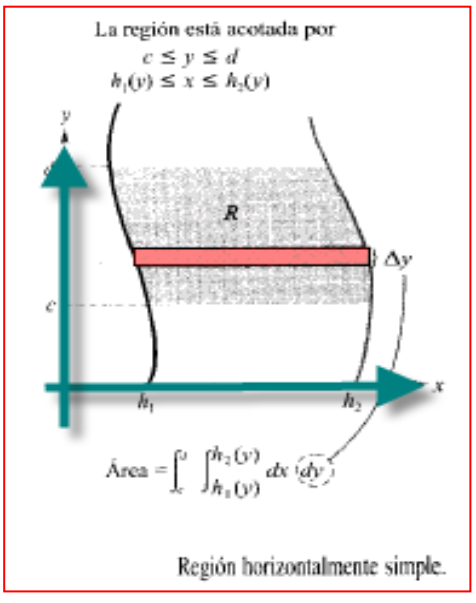
$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx \qquad \text{(verticalmente simple)}$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1, h_2 son continuas en $[c, d]$, el área de R viene dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy \qquad \text{(horizontalmente simple)}$$



Región verticalmente simple.

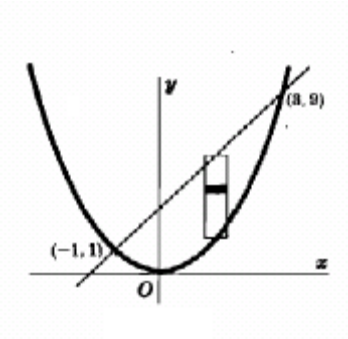


Región horizontalmente simple.

Ejemplo:

Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$

Solución:



Trazando franjas verticales

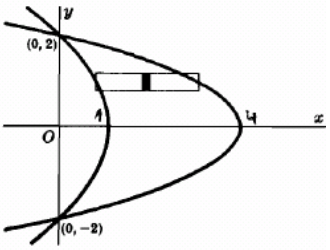
Se tiene que los puntos de intersección de las 2 curvas son $(3, 9)$ y $(-1, 1)$

$$A(R) = \iint dA \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\, dx = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2) dx = \frac{32}{3} \ u^2$$

Ejemplo:

Hallar el área de la regi{on comprendida entre las dos parábolas $y^2 = 4 - x$ e $y^2 = 4 - 4x$

Solución: En este caso usando franjas horizontales y teniendo en cuenta la simetría que se observa en la figura



$$A(R) = 2 \iint dA \ = 2 \int_{0}^{2} \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\, dy = 2 \int_{0}^{2} \left[(4 - y^2) - (1 - \frac{1}{4} y^2 \right] dy = 8 \ u^2$$

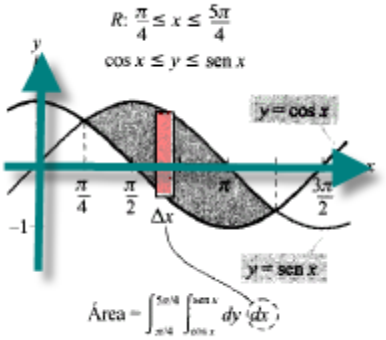
EJEMPLO *Cálculo del área por una integral iterada*

Usar una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de

$f(x) = \operatorname{sen} x$ La curva seno es la cota superior

$g(x) = \cos x$ La curva coseno es la cota inferior

entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.



$$\text{Área de } R = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dy\, dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y \Big]_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$$

$$= \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

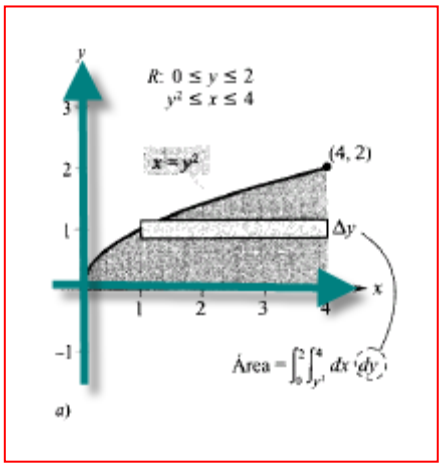
$$= 2\sqrt{2}$$

EJEMPLO *Comparación de órdenes de integración distintos*

Dibujar un esbozo de la región cuya área viene dada por la integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy$$

Representar, a continuación, esa misma área mediante una integral con orden de integración $dy\, dx$. Verificar que las dos integrales dan el mismo valor para el área.



Solución: A la vista de los límites de integración propuestos, vemos que

$$y^2 \leqslant x \leqslant 4 \qquad \text{Límites interiores de integración}$$

de modo que la región R está acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como

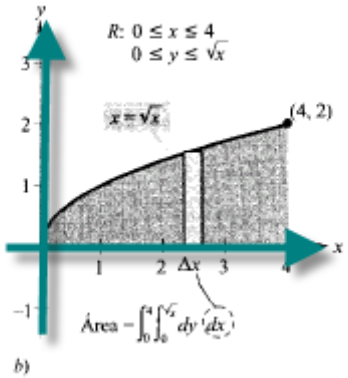
$$0 \leqslant y \leqslant 2 \qquad \text{Límites exteriores de integración}$$

R está acotada por abajo por el eje x, como muestra la Figura El valor de esa integral es

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy = \int_0^2 x \Big]_{y^2}^4 dy$$
$$= \int_0^2 (4 - y^2)\, dy$$
$$= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Para cambiar el orden de integración a $dy\, dx$, colocamos un rectángulo vertical en la región, como indica la Figura Así vemos que las cotas constantes $0 \leqslant x \leqslant 4$ sirven como límites interiores de integración. Despejando y en la ecuación $x = y^2$, concluimos que los límites interiores son $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región se puede representar por

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx$$



Calculando esta integral, comprobamos que da el mismo valor que la integral original:

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^4 y \Big]_0^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^4 \sqrt{x}\, dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} \Big]_0^4 = \frac{16}{3}$$

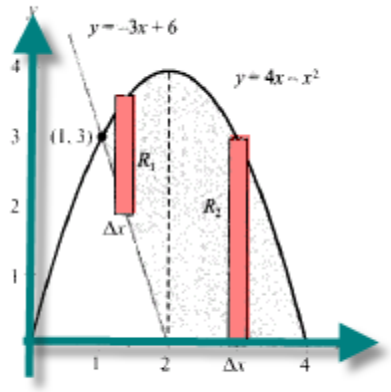
EJEMPLO *Un área dada por la suma de dos integrales iteradas*

Calcular el área de la región R comprendida entre la parábola

$$y = 4x - x^2$$ La parábola es la cota superior

y el eje x, y por encima de la recta

$$y = -3x + 6$$ La recta y el eje x constituyen la cota inferior



$$\text{Área} = \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy\, dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy\, dx$$
$$= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6)\, dx + \int_2^4 (4x - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6\right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{15}{2}$$

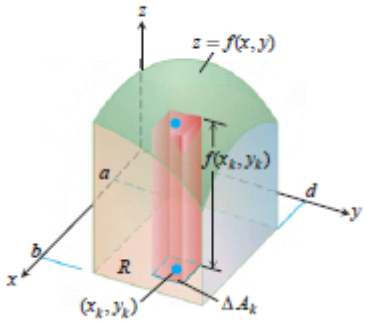
El área de la región es 15/2 unidades cuadradas.

Integrales dobles y volumen

Integrales dobles y volumen de sólidos

Ya sabemos que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para medir magnitudes como área, volumen, longitud de arco y masa. En esta sección utilizaremos un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región del plano*.

Consideremos una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy. Nuestro objetivo consiste en hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie de ecuación

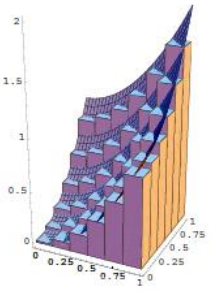


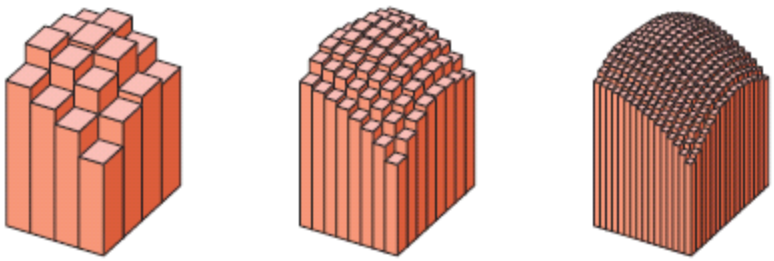
Podemos empezar superponiendo a esa región un retículo rectangular como el de la Figura Los rectángulos que están completamente contenidos en R forman una **partición interior** $\|\Delta\|$, cuya norma se define como la longitud de la diagonal más larga de entre las de los n rectángulos. Ahora tomamos un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y construimos el prisma rectangular de altura $f(x_i, y_i)$, como muestra la Figura Puesto que el área del i-ésimo rectángulo es $\Delta A_1 = \Delta x_i \Delta y_i$, el volumen del i-ésimo prisma es

$$f(x_i, y_i)\Delta A_i = f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i \qquad \text{Volumen del } i\text{-ésimo prisma}$$

y podemos aproximar el volumen de la región sólida por la suma de Riemann de los volúmenes de los n prismas,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i \qquad \text{Suma de Riemann}$$





al tomar particiones más finas se logran aproximaciones más precisas del volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando el límite, es decir

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

La utilización del límite de una suma de Riemann como definición del volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. En el caso general, sin embargo, no se exige que la función sea positiva o continua.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, la **integral doble de** f sobre R viene dada por

$$\int_R \int f(x, y)dA = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

siempre que este límite exista. Si el límite existe, se dice que f es **integrable** sobre R.

Puede utilizarse una integral doble para calcular el volumen de una región sólida comprendida entre la superficie dada por $z = f(x, y)$ y el plano xy.

VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R, el volumen de la región sólida acotada inferiormente por R y superiormente por la gráfica de f se define como

$$V = \int_R \int f(x, y)\, dA$$

Propiedades de las integrales dobles

Las integrales dobles comparten muchas propiedades con las integrales simples.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y c una constante.

1. $\int_R \int cf(x, y)\, dA = c \int_R \int f(x, y)\, dA$
2. $\int_R \int [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \int_R \int f(x, y)\, dA \pm \int_R \int g(x, y)\, dA$
3. $\int_R \int f(x, y)\, dA \geq 0, \quad$ si $f(x, y) \geq 0$
4. $\int_R \int f(x, y)\, dA \geq \int_R \int g(x, y)\, dA, \quad$ si $f(x, y) \geq g(x, y)$
5. $\int_R \int f(x, y)\, dA = \int_{R_1} \int f(x, y)\, dA + \int_{R_2} \int f(x, y)\, dA$

donde R es la unión de dos regiones R_1, R_2, sin solapamiento entre sí.

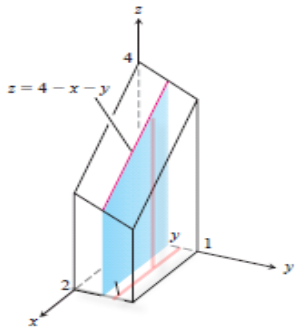
TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R.

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces
$$\int_R \int f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$
2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces
$$\int_R \int f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Ejemplo:

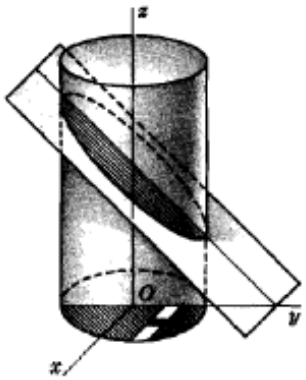
1) Calcular el sólido limitado bajo el plano $z = 4 - x - y$ y sobre la región rectangular $R: 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 1$



$$V(S) = \iint_R (4 - x - y)\, dA$$

$$V(S) = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\, dy\, dx. \quad = 5 \text{ unidades cúbicas}$$

2) Hallar el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x + z = 4$, sobre el $Pl(XY)$



$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy = 2\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$